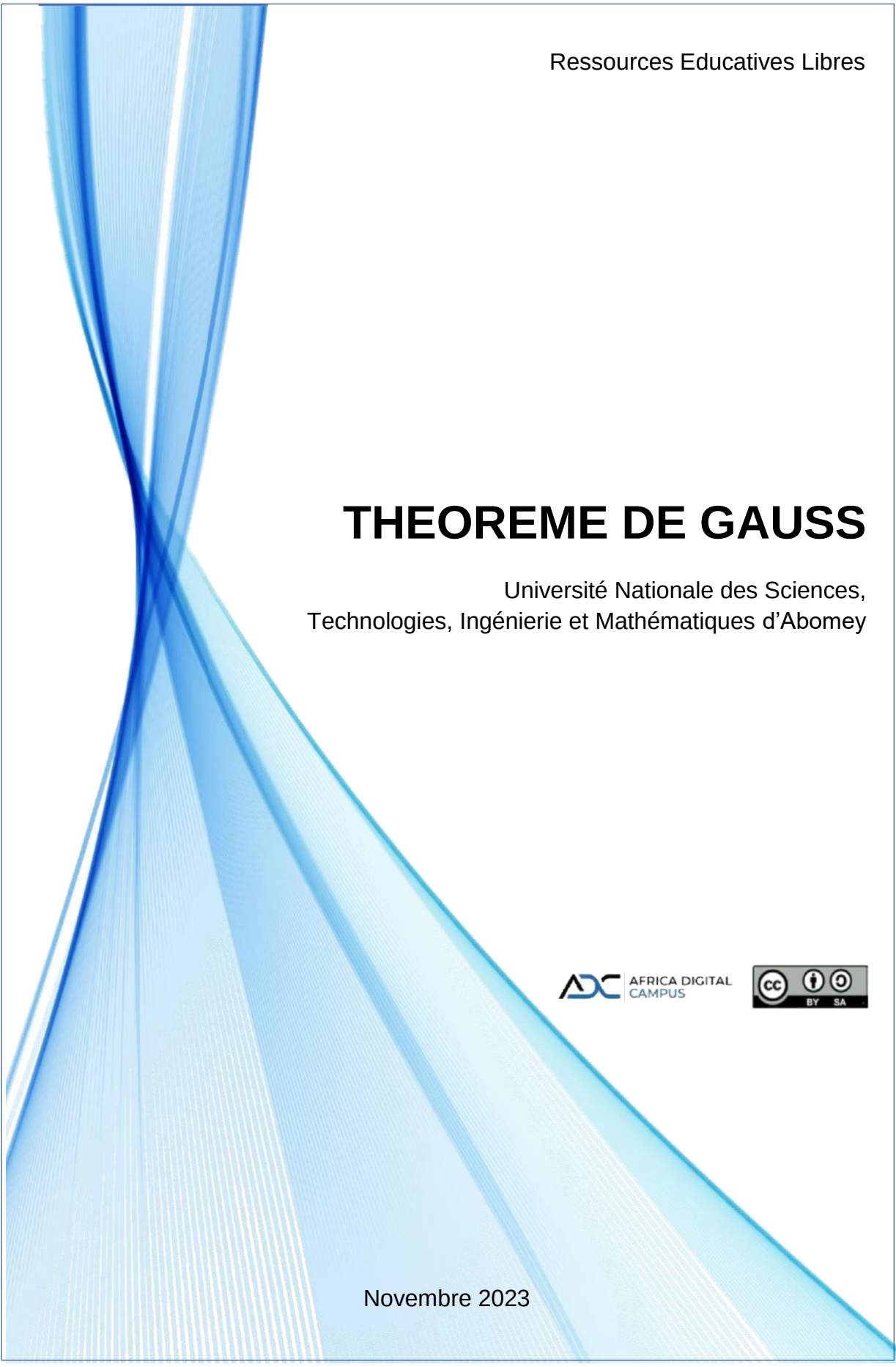




Ressources Educatives Libres

THEOREME DE GAUSS

Université Nationale des Sciences,
Technologies, Ingénierie et Mathématiques d'Abomey



Novembre 2023

Chapitre 2

Théorème de Gauss

2.1 Définition

On considère plusieurs charges q_i , les unes à l'intérieur du volume τ , les autres à l'extérieur.

- Si q_i est à l'intérieur $\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$,
- Si q_i est à l'extérieur : $\Phi_i = 0$.

Par conséquent, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à S :

$$\Phi_i = \iint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad \text{charge intérieures uniquement} \quad (2.1)$$

2.2 Loi locale et loi intégrale

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volume τ qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ . On a alors

$$\Phi = \iint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss. Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs : $\Phi = \iint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} d\tau$

De ces relations, on déduit la forme suivante pour le théorème de Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ elle désigne la loi locale du théorème de Gauss.

2.3 Equations de poisson et de Laplace

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}, \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4)$$

$$\implies \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}V}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\implies \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{équation de Poisson} \quad (2.6)$$

Dans le vide on $\Delta V = 0$ (équation de Laplace).

Exemples d'application

1. Déterminer le champ électrique et le potentiel électrique créés par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéique λ .
2. Déterminer le champ électrique et le potentiel électrique créé par une sphère chargée d'une densité volumique ρ uniforme.

Résultats

1. La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindre φ et z .

$$V = V(r), \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$$

Le champ électrique est donc radial. pour calculer le champ en M , on peut choisir comme surface fermée d'intégration (S) un cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h (surface de gauss).

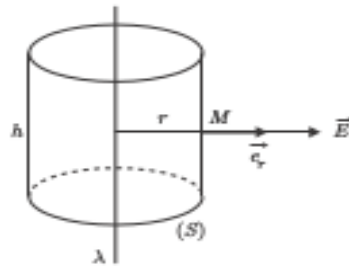


FIGURE 2.1 – surface de Gauss pour un fil rectiligne infini

Le flux sortant par les bases étant nul, on a

$$\Phi = \oint_{(s)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_{(S_{lat})} E ds = E \iint_{(S_{lat})} ds = 2\pi r h E \quad (2.7)$$

$$\sum \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi \epsilon_0 r} \quad (2.9)$$

Le potentiel en M se déduit de $\vec{E}$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow dV = -E dr \quad (2.10)$$

$$\text{D'où } V = -\int E dr = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + cste$$

Les lignes de champ sont des droites radiales, et les surfaces équipotentielles des cylindres coaxiaux de révolution autour du fil.

2. Par suite de la symétrie sphérique, on peut considérer que $V = V(r)$ et par conséquent que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r \quad (2.11)$$

est radial d'une part, et ne dépend que de r d'autre part.

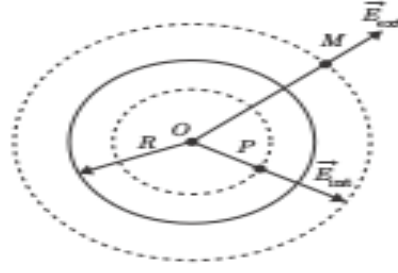


FIGURE 2.2 – Surface de Gauss pour une symétrie sphérique

- Champ à l'extérieur : $OM \geq R$

Soit (S_1) la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r) on a :

$$\oint_s E_{ext} ds = E_{ext} \oint_{(S_1)} = 4\pi r^2 E_{ext}$$

$$\sum \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$4\pi r^2 E_{ext} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Champ à l'intérieur : $OP \leq R$

Soit (S_2) la surface de Gauss passant par le point P intérieur (sphère de rayon r). On a encore

$$\oint_s E_{int} ds = 4\pi r^2 E_{int}, \quad \sum \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

On a d'après le théorème de Gauss $\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$

Calcul du potentiel

Le champ $\vec{E}$ étant radial, $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E dr$

A l'extérieur, on a :

$$V_{ext} = - \int E_{ext} dr = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

$$r \rightarrow \infty, V \rightarrow 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

A l'intérieur

$$V_{int} = - \int E_{int} dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2 \quad (2.12)$$

La continuité de V à la surface de la sphère donne

$$\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 R} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \quad (2.13)$$

$$V_{int} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right] \quad (2.14)$$

Autre méthode

$$\vec{dE} = \frac{\lambda dz \vec{PM}}{4\pi \epsilon_0 PM^3}, \quad \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_\theta, \quad PM = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.15)$$

Les composantes du champ total s'écrivent alors

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

Posons

$$\tan \alpha = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{r}$$

$$z \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad z \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Les composantes du champ peuvent être calculées en posant

$$z = r \tan \alpha, \quad dz = \frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$E_z = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

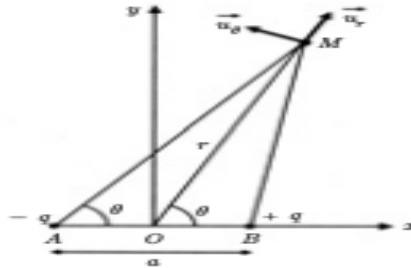
$$\text{D'où } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

2.4 Dipôle électrostatique : Potentiel et champ créés

2.4.1 Définition du dipôle électrostatique

On appelle dipôle électrostatique le système constitué de deux charges ponctuelles opposées $-q$ et $+q$ situées respectivement aux deux points A et B distants de a et tels que $a = AB$ soit très petite devant les autres distances envisagées

2.4.2 Moment dipolaire



On définit le moment dipolaire par le vecteur

$$\vec{P} = q\vec{AB} = qa\vec{u}_{AB} \quad (2.18)$$

On peut noter que q est toujours la valeur absolue de la charge et que $\vec{P}$ orienté de la charge négative vers la charge positive.

L'unité de cette quantité est donc, dans les unités du système international, le coulomb mètre ($C.m$) compte tenu des ordres de grandeur, on préfère souvent donner les moments dipolaires en debye de symbole D , $1D = 3.336.10^{-30}C.m$

2.4.3 Potentiel électrostatique crée par un dipôle

Le potentiel crée en M par les deux charges ponctuelles $(-q)$ et $(+q)$ s'écrit, d'après le principe de superposition on a

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM} \quad (2.19)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right) \quad (2.20)$$

On se place en coordonnées polaire d'origine O dans un plan contenant le point M et la droite (AB) sans perdre en généralité du fait de la symétrie autour de cette droite. On obtient

$$AM^2 = (\vec{AO} + \vec{OM})^2 = AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} \quad (2.21)$$

$$= r^2 + \frac{a^2}{4} + 2r \frac{a}{2} \cos \theta \quad (2.22)$$

$$= r^2 \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos \theta \right). \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

Comme le point M est loin de la distribution, on a $\ll r$ et on peut effectuer un développement limité de la relation précédente :

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta + 0 \left(\frac{a}{r} \right) \right) \quad (2.25)$$

De la même manière, on obtient

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta + 0 \left(\frac{a}{r} \right) \right) \quad (2.26)$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression du potentiel dans le cadre de l'approximation considérée (au premier ordre)

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta - 1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \quad (2.27)$$

$$= \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.28)$$

Or $qa = P$ et $P \cos \theta = \vec{P} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM}$

$$V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 (OM)^3} = \frac{POM}{4\pi\epsilon_0 (OM)^3}$$

2.4.4 Champ électrostatique crée par un dipôle

On déduit l'expression du champ électrostatique du potentiel à partir de la relation

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ et de l'expression obtenue pour le potentiel

$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. En coordonnées polaires

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.29)$$