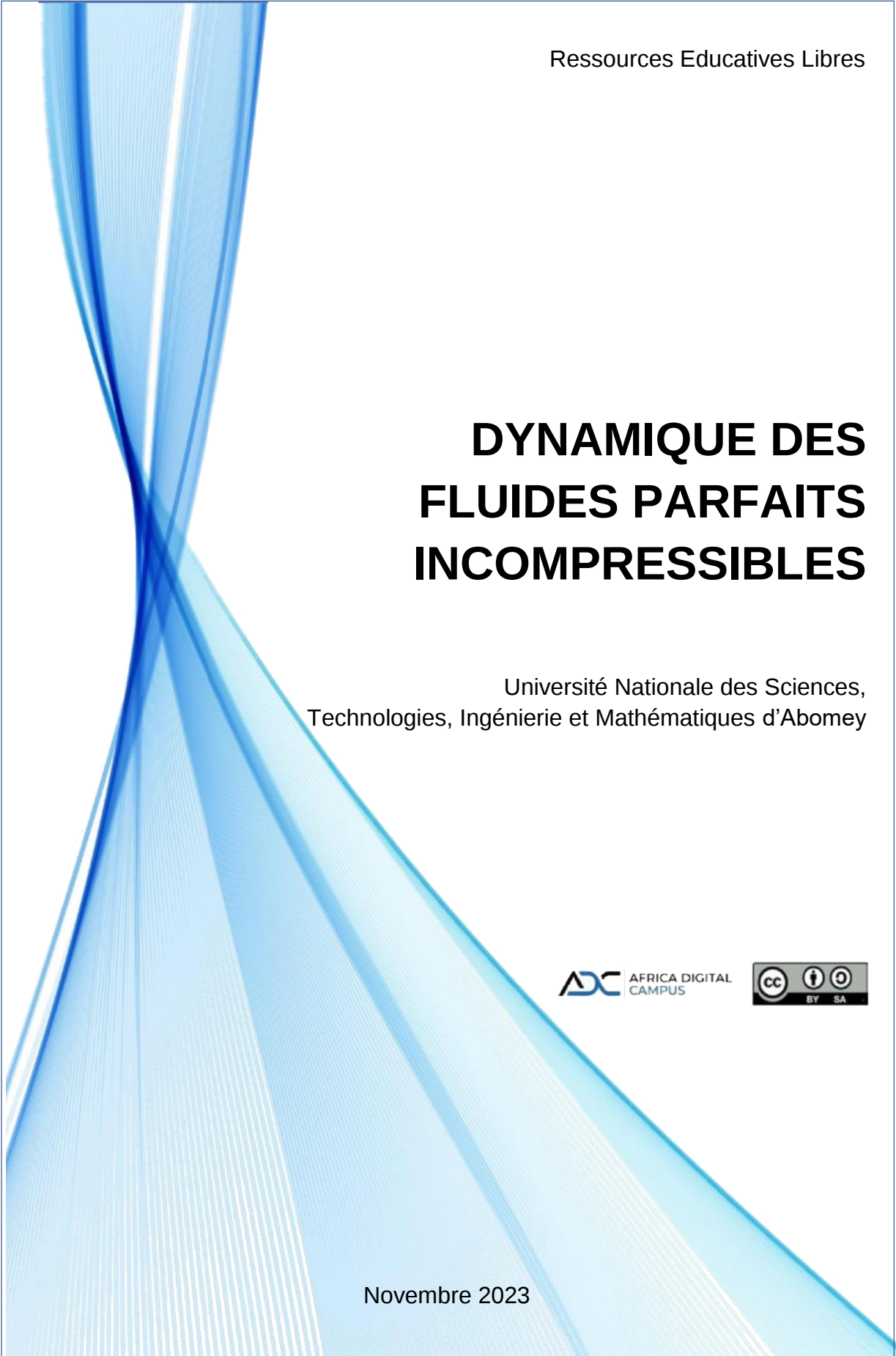




Ressources Educatives Libres

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

Université Nationale des Sciences,
Technologies, Ingénierie et Mathématiques d'Abomey



Novembre 2023

Chapitre 3

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

3.1 Introduction

On considère un élément de volume de fluide, faisons le bilan des forces agissant sur cet élément. On peut distinguer 3 types de forces.

- Les forces de volume qui sont proportionnelles au volume (poids, poussée d'Archimède).
- Les forces de pression proportionnelles aux éléments de surface.
- Les forces d'inertie proportionnelles à l'accélération.

Ce bilan nous permet d'établir l'équation fondamentale de la dynamique

$$\sum_i \vec{f}_i = m\vec{a}. \quad (3.1)$$

En statique l'accélération $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$.

3.2 Equation de Bernouilli

3.2.1 Cas d'un écoulement sans échange de travail

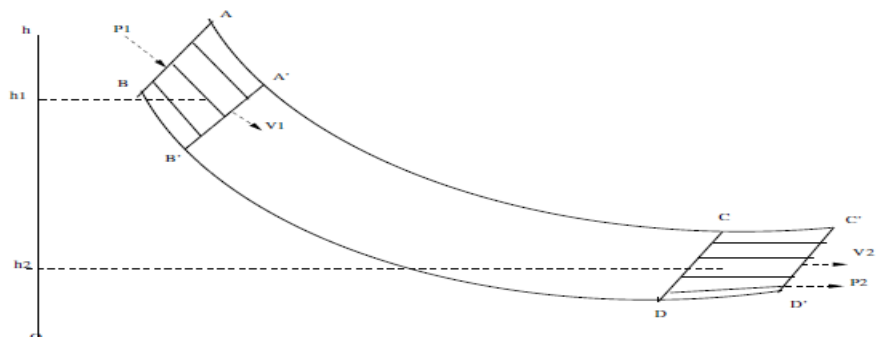


FIGURE 3.1 – Portion d'écoulement [1]

s_1 est l'aire de la face AB et s_2 est l'aire de la face CD.

Pendant un temps dt infiniment petit la masse de fluide contenue dans $ABCD$ passe dans la position $A'B'C'D'$. L'énergie mécanique contenue dans la position $A'B'C'D'$ n'a pas changé. Tout s'est passé comme si la position $ABB'A'$ est passée dans la position $CDD'C'$. La conservation de la masse nous permet d'écrire

$$dm = \rho s_1 v_1 dt = \rho s_2 v_2 dt \quad (\text{Masse déplacée}), \quad (3.2)$$

D'où :

$$\boxed{s_1 v_1 = s_2 v_2} \quad \text{Equation de continuité.} \quad (3.3)$$

Calcul du travail des forces de pression

$$W(\text{pres}) = P_1 s_1 v_1 dt \quad \text{en AB}, \quad (3.4)$$

$$W(\text{pres}) = -P_2 s_2 v_2 dt \quad \text{en CD.} \quad (3.5)$$

Travail du poids est

$$W(\text{poids}) = (dm)g(h_1 - h_2). \quad (3.6)$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{1}{2}(dm)(v_2^2 - v_1^2) = P_1 s_1 v_1 dt - P_2 s_2 v_2 dt + (dm)g(h_1 - h_2), \quad (3.7)$$

Or $dm = \rho s_1 v_1 dt$ ce qui entraîne :

$$\frac{1}{2}\rho s_1 v_1 dt (v_2^2 - v_1^2) = P_1 s_1 v_1 dt - P_2 s_2 v_2 dt + s_1 v_1 \rho g (h_1 - h_2) dt \quad (3.8)$$

$(dm = \rho s_1 v_1 dt = \rho s_2 v_2 dt \Rightarrow s_1 v_1 = s_2 v_2)$
ce qui entraîne

$$\frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2 + g\rho (h_1 - h_2) \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + g\rho h_2 + P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + g\rho h_1 + P_1 = \text{cste} \Rightarrow \quad (3.10)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + g\rho h + P = \text{cste}}. \quad (3.11)$$

Le terme $\frac{1}{2}\rho v^2$ représente l'énergie cinétique de l'unité de volume pour un fluide incompressible.

$p^* = p + \rho gh$ est l'énergie potentielle de l'unité de volume du fluide dans le champ de pesanteur dans la constante h et sous la pression p . L'équation de Bernoulli est la traduction de la conservation de l'énergie mécanique totale au cours du mouvement.

3.2.2 Cas d'un écoulement avec échange de travail

On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections s_1 et s_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe. Les grandeurs η , P_{net} et P_a sont liées par les relations suivantes

$$\boxed{\eta = \frac{P_{net}}{P_a}} \quad \text{pour une pompe} \quad (3.12)$$

$$\boxed{\eta = \frac{P_a}{P_{net}}} \text{ pour une turbine} \quad (3.13)$$

Dans application du théorème de l'énergie cinétique on tient compte du travail de la machine hydraulique ; $W(machine) = P_{net}dt$. Alors, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v_2^2 + g\rho h_2 + P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + g\rho h_1 + P_1 + \frac{P_{net}}{D_v} = cste} \quad (3.14)$$

3.3 Application de l'équation de Bernouilli

Exercices 10 et 11 page 72 [1] tube de pitot (mesure de la vitesse) et tube de venturi (mesure de débit).