

Ressources Educatives Libres

Electricité

Activité : Loi de Coulomb-Théorème de
superposition

Université Virtuelle du Burkina Faso (UV-BF)

Karim GUIBULA



Janvier 2023

I. Charge électrique

I. 1. Charges élémentaires

La matière est formée d'atomes qui sont constitués de particules élémentaires. Parmi ceux-ci, les électrons et les protons portent des charges électriques.

Charge de l'électron : $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Charge du proton : $p = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$

La charge portée par l'un de ces deux particules dites élémentaire et la charge élémentaire ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$).

On peut électriser un objet par fortement. Ce phénomène correspond toujours à l'apport ou à la soustraction d'électrons de l'objet. Un objet électrisé porte une charge électrique qui est égale à un multiple entier de la charge élémentaire.

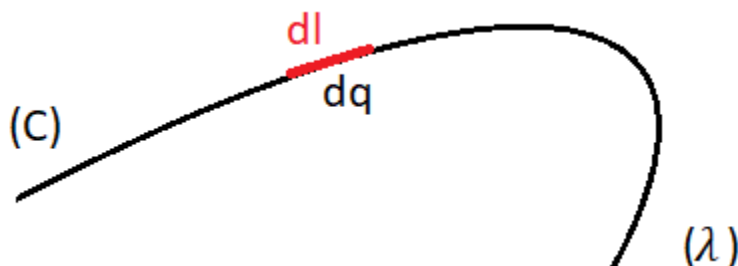
I.2. Distribution de charges

Les charges peuvent être réparties de façon discrètes ou continue. La répartition est discrète si les porteurs de charges sont situés dans l'espace en des points distants l'un de l'autre. Dans le cas d'une distribution continue, les porteurs de charges disposer de façon continue sur une ligne (distribution linéique), une surface (distribution surfacique) ou dans un volume (distribution volumique).

a. Cas d'une distribution linéique

Une distribution linéique de charges est caractérisée en tout point par une densité linéique de charges λ telle que : $\lambda = \frac{dq}{dl}$

Avec dl un élément de longueur et dq la charge portée dl ; λ s'exprime en C/m. Si $\lambda = cste$ la distribution est uniforme.



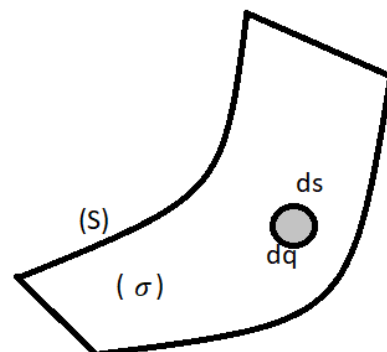
b. Cas d'une distribution surfacique

Une distribution surfacique de charges est caractérisée par une densité surfacique de charges σ en tout point de la surface tel que :

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

Avec dS un élément de surface et dq la charge portée par dS . σ s'exprime en C/m².

$$dq = \sigma ds$$



La charge totale portée par toute la surface est :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma ds$$

Si la distribution est uniforme alors $\sigma = \sigma_0 = cste$. Ainsi, la charge totale devient alors : $Q = \sigma_0 S$

c. Cas d'une distribution volumique

Une distribution volumique est caractérisée par une densité volumique de charges ρ telle que :

$$\rho = \frac{dq}{dV} , \quad dq = \rho dV$$

Avec dV un élément de volume et dq la charge portée par l'élément de volume dV .

$$dq = \rho dV$$

La charge totale portée par tout le volume (V) est donnée par l'expression :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

Si la distribution est uniforme alors $\rho = \rho_o = cste$ et la charge totale est donnée par l'expression : $Q = \rho_o V$.

I.3. Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 immobiles dans respectivement aux points A et B. Ces deux charges exercent l'une sur l'autre des forces électriques opposées et de même valeur. L'expression de ces forces est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_A q_B}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8,854 \cdot 10^{-12} F.m^{-1} : \text{Permittivité diélectrique du vide}$$

$r = AB$: Distance entre les deux charges (r

s'exprime en m)

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$: Vecteur unitaire orienté de A vers B.

Si l'interaction se produit dans un milieu autre que le vide, on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_r est la permittivité relative du milieu et ϵ_r celui du diélectrique absolue.

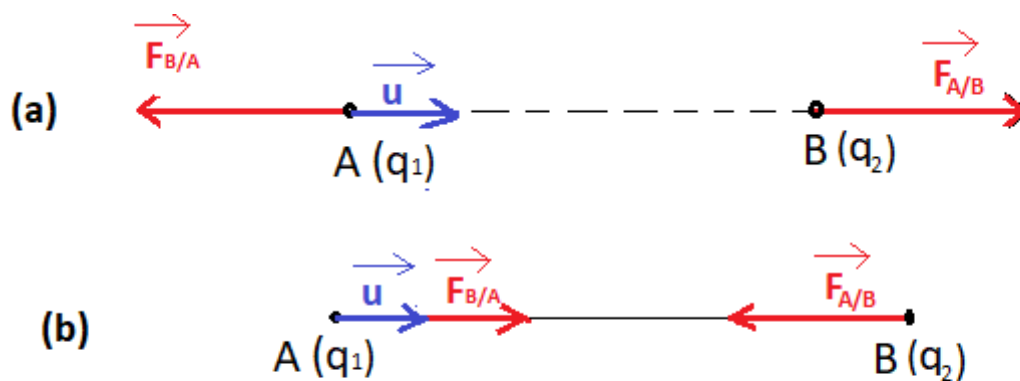


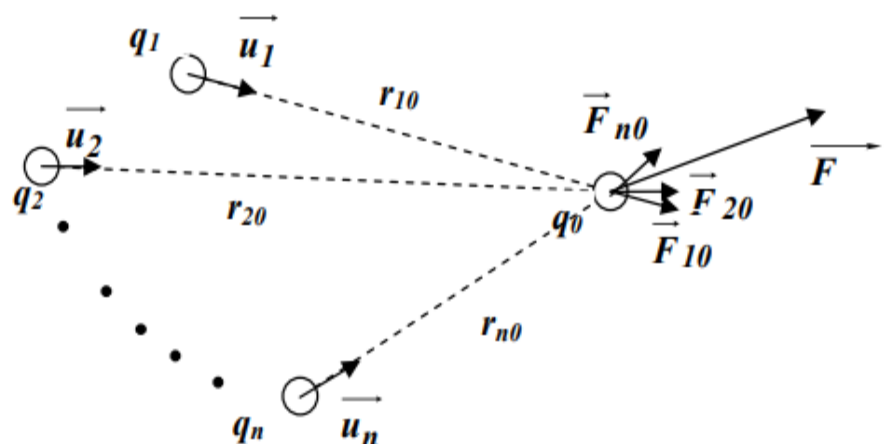
Figure: Interactions électrostatiques; (a): les charges sont de même signe (Repulsion); (b): les charges sont de signes opposés (Attraction)

Exercice d'application 1 : Une charge ponctuelle $q_0 = 0,5\mu C$ est placée à l'origine O d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En utilisant la loi de Coulomb, déterminer les caractéristiques de la force exercée par cette charge sur une autre charge $q_1 = -0,2\mu C$ placé au point $M(3,0)$ (cm).

I.4. Principe de superposition

Soit q_0 une charge électrique ponctuelle située en un point M_0 de l'espace et soit $q_1, q_2, \dots, q_n$, des charges ponctuelles situées respectivement aux points $M_1, M_2, \dots, M_n$. Toutes ces charges sont immobiles.

On montre



expérimentalement que la force électrostatique $\vec{F}$ exercée sur q_0 est la somme vectorielle des forces électrostatiques exercées par chacune des n charges : C'est le principe de **superposition**.

De façon explicite on aura :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_i}{r_{io}^2} \cdot \vec{u}_i$$

Exercice d'application 2 : Trois charges q_0 , q_1 et q_2 sont placées respectivement aux points $O(0,0)$, $A(0,2)$ et $B(2,0)$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En appliquant le principe de de superposition, déterminer la valeur de la force exercée par les autres charges sur la charge q_1 .

On donne : $q_1 = -q_2 = 2q_0 = q = 0,4nC$.

II. Champ électrique

II.1. Définitions

On dit qu'en une région de l'espace il existe un champ électrique $\vec{E}$ si une charge électrique q placée en un point de cette région est soumise à une force de nature électrostatique $\vec{f}$ tel que :

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

$$E = \frac{f}{|q|}. E \text{ s'exprime donc en N/C.}$$

Toutefois, l'unité usuelle du champ électrique est le volt par mètre (V/m)

II.2. Expression du champ magnétique créé par une charge ponctuelle

Soit q une charge ponctuelle placée au point A. On se propose de trouver le champ $\vec{E}$ qu'elle crée en un point M.

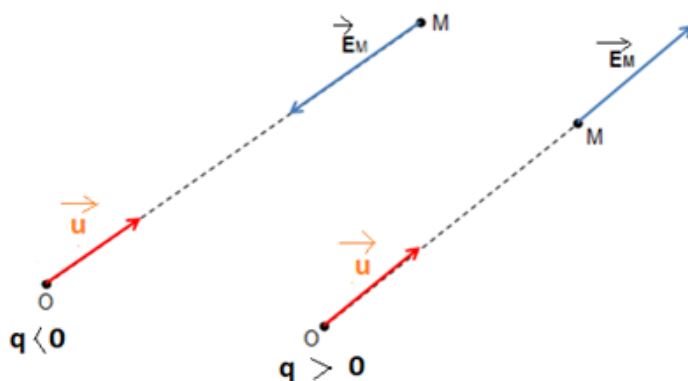


Figure 3: Représentation du champ électrique créée par une charge ponctuelle en un point

Plaçons en M une charge q' . Elle est soumise à une force électrique $\vec{f}'$ tel que :

$$\vec{f}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u} \text{ avec } r = AM \text{ et}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{AM}}{AM} : \text{unitaire de AM}$$

Par définition, $\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}$. D'où $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$

- Si $q > 0$, $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de même sens, le champ électrique est dit centrifuge
- Si $q < 0$, $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés, le champ électrique est dirigé vers q . Il est dit centripète.

Exercice d'application 3 : Une charge négative $q = -10 \mu C$ est placée à l'origine d'un repère. Calculer le champ électrique créé par cette charge en un point $M (4 ; -7)$ (cm). Déterminer le potentiel créé par cette charge au point M.

II.3. Champ électrique créé par une distribution ponctuelle discrète de charges

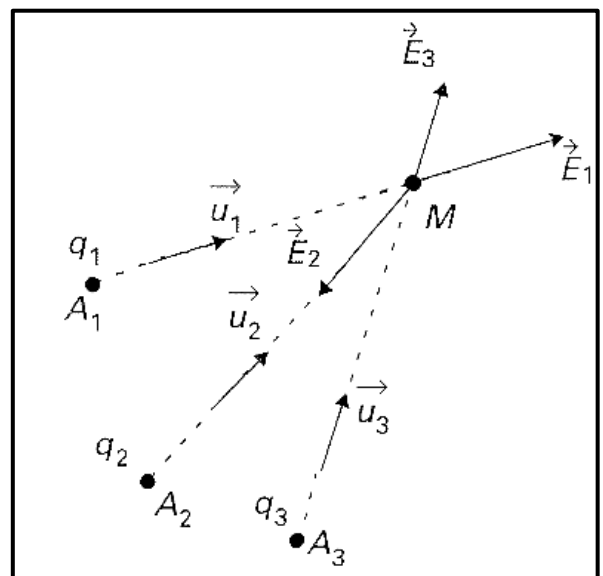
Soient q_i un ensemble de charges électriques ponctuelles (voir figure). Pour chaque charge q_i , on peut écrire :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Avec $\vec{r}_i = A_i M$; $\vec{u}_i = \frac{\vec{A_i M}}{A_i M}$: vecteur unitaire de la direction $A_i M$; $\vec{u}_i$ toujours dirigé de A_i vers M

Le champ électrique résultant est donc :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$



Exercice d'application 4 : Soit deux charges ponctuelles q_A et q_B placées

respectivement aux points $A(2, 0)$ et $B(0, 4)$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les caractéristiques du champ électrique créée par ces deux charges en $O(0,0)$.

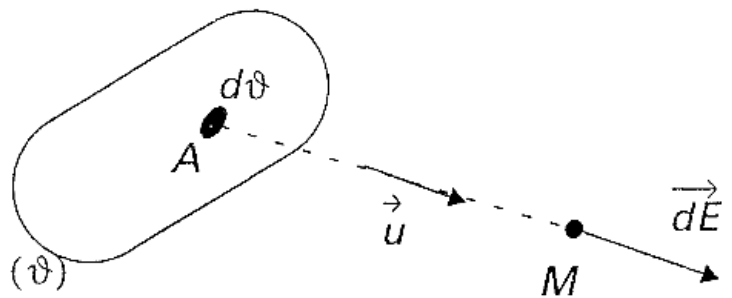
II. 4. Champ créé par une distribution continue de charges

a. Distribution volumique de charges

Soit un élément de volume dv centre sur un point A où la densité de charge est ρ . Cet élément de volume porte la charge $dq = \rho dv$ assimilable à une charge ponctuelle. Cette charge élémentaire crée en M un champ $d\vec{E}$ donné par l'expression :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

Le champ $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la distribution de charges sera :



$$\vec{E} = \iiint_v d\vec{E}$$

Soit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

b. Distribution surfacique de charges

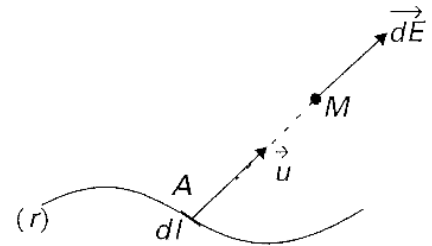
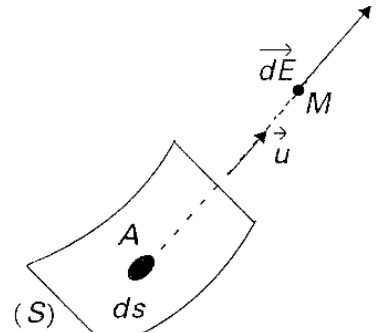
De la même manière que précédemment, on trouve que le champ électrique créé par une distribution surfacique de charges est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

c. Distribution linéique de charges

De la même manière que précédemment, on trouve que le champ électrique créé par une distribution linéique de charges est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$



III. Potentiel électrique

III.1. Rappels

Soit un champ scalaire $G(x, y, z)$. On appelle gradient de $G(x, y, z)$, le champ de vecteur $\vec{A}$ défini par :

$$\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} G \text{ où } \overrightarrow{\text{grad}} \text{ a pour composantes cartésiennes } \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Activité 3: Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

III.2. Potentiel électrique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée en O , origine d'un repère $Oxyz$. Cette charge crée en un point M un champ électrique $\vec{E}$ tel que :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction OM .

En posant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, on obtient alors

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Or on sait que : $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$; d'où :

$$\vec{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

Par définition, on appelle potentiel électrique créé par la charge ponctuelle q à

la distance r le scalaire :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constante}$$

On déduit la relation entre le champ électrique et le potentiel de la façon suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

On dit que le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Exercice d'application 5 :

1. Une charge ponctuelle $q = -0,4 \mu\text{C}$ est placée au point $O(0,0)$ d'un repère $(0,\vec{i})$. Calculer le potentiel créé par cette charge en un point $M(4, 0)$ (cm). On supposera qu'il n'y a pas de charge à l'infini
2. Le champ électrique créé par une charge électrique en un point M est donné par l'expression $\vec{E} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$. En déduire l'expression du potentiel électrique en ce point.

III.3. Potentiel électrique créé par une distribution discrète de charges

Soit un ensemble de charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_n$ créant en un même point M des champs électriques $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ tels que :

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

Le champ électrique total :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

L'opérateur gradient étant relatif aux coordonnées x, y, z du point M , on a donc :

$$\vec{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r_i} \right)$$

Soit :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right)$$

Comme $\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$ alors, le potentiel créé en M par l'ensemble de la distribution à pour expression :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + \text{constante}$$

NB : En général, s'il n'y a pas de charges à l'infini, la constante est nulle par convention

Constante = 0 $\Leftrightarrow V = 0$ à l'infini (**C'est la convention du potentiel coulombien**)

Exercice d'application : Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 sont placées respectivement aux points $O(0,0)$ et $M(2,0)$ (cm) d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la valeur du potentiel créé par ces charges au point $N(0,2)$ (cm).

On donne : $q_1 = q_2 = q = 0,5\mu\text{C}$.

III.4. Potentiel créé par une distribution continue de charges

On passera de la distribution discrète de charges à la distribution continue

comme précédemment pour le champ électrique, en changeant :

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \text{ en :}$$

$$\iiint_V \frac{\rho dv}{r} : \text{Si l'on a un volume (V) chargé de densité volumique } \rho$$

$$\iint_S \frac{\sigma ds}{r} : \text{Si l'on a une surface (S) chargée de densité surfacique } \sigma$$

$$\int_C \frac{\lambda dl}{r} : \text{Si l'on a une ligne chargée de densité linéique } \lambda$$

On obtient alors :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{grad} V \text{ avec :}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r} + \text{constante}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r} + \text{constante}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{r} + \text{constante}$$

NB : En l'absence de charges à l'infini on prendra la constante = 0.

III.5. Circulation du champ électrique

Soit un parcours AB orienté de A vers B. La circulation du champ $\vec{E}_M$ sur un élément de parcours $\vec{dl}$ est donnée par l'expression :

$$dC = \vec{E}_M \cdot \vec{dl} = - \overrightarrow{grad} V_M \cdot \vec{dl} = -dV_M$$

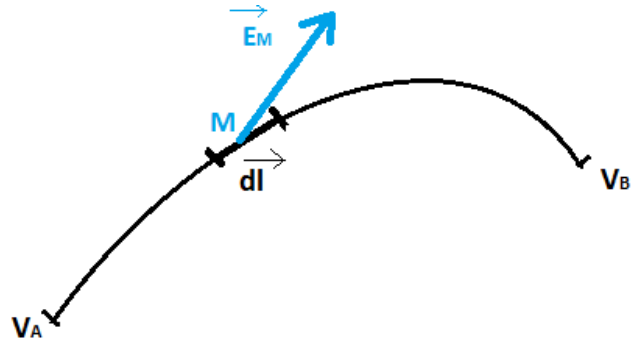
On en déduit les relations : $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$

Sur tout le parcours AB on a :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{V_A}^{V_B} -dV = V_A - V_B$$

En particulier, si le parcours est fermé $V_A = V_B$ et donc :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



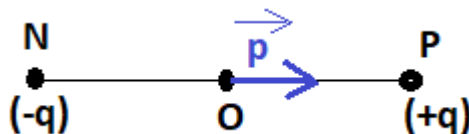
NB : La circulation du champ électrique le long d'un parcours fermé est nulle.

IV. Dipôle électrique

IV.1. Définition

Un dipôle est un ensemble de deux charges électriques ponctuelles $+q$ et $-q$ séparées par une distance « a » très petite devant $r = OM$ qui est la distance du dipôle au point d'observation M.

On appelle moment dipolaire du dipôle la grandeur : $\vec{p} = q\vec{AB} = qa\vec{e}$



p s'exprime en C.m. On utilise aussi le Debye : $1 \text{ Debye} = 1/310^{-19} \text{ C.m}$

VI.2. Potentiel du dipôle

Soit $(-q ; +q)$ un dipôle. O est le milieu de NP. Soit M un point situé à une distance r de O (Voir figure). Le potentiel électrique créé par les charges $-q$ et $+q$ en M est donné par l'expression :

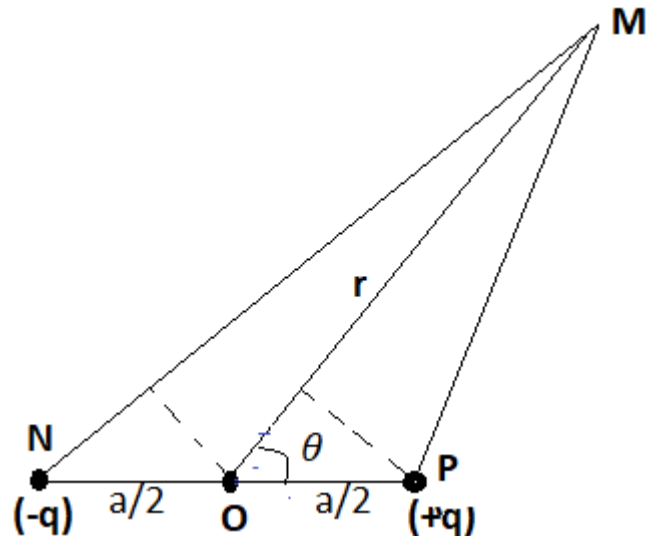
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

D'après la définition du dipôle, $r = OM \gg$

a .

On a donc :

$$r_B \approx r - \frac{a}{2} \cos\theta \quad \text{et} \quad r_A \approx r + \frac{a}{2} \cos\theta$$



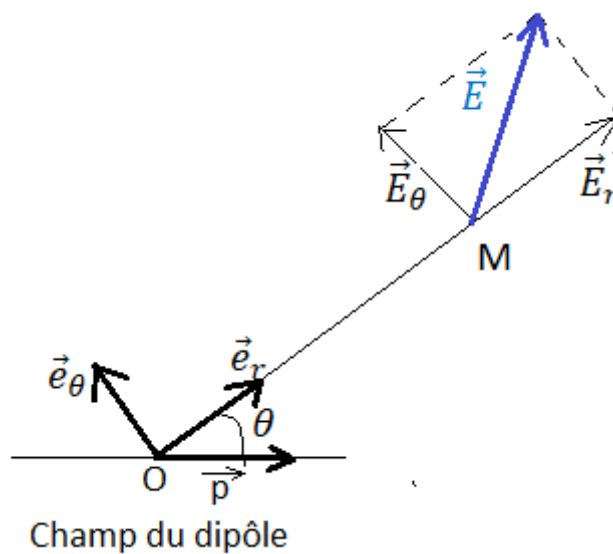
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B r_A} \right)$$

$r_A - r_B = a \cos\theta$ et $r_B r_A \approx r^2$ On obtient donc :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

VI.3. Champ créé par un dipôle

$$\text{On sait que } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Leftrightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$



Bibliographie

- **Chafik El I.M.,** Electricité, Cours, exercices et problèmes corrigés, Université Ibn Fofaïl
- **Granjon Y.,** Electromagnétisme et électrostatique, Exercices et Méthodes, Dunod, 2019
- **Amzallag E., Cipriani J., Jocelyne BA, Piccioli N.,** Electrostatique et électrocinétique, cours et exercices corrigés, EdiScience, 2è Edition
- **Kremppf P.,** Précis d'Electromagnétisme, Cours, Méthodes, Exercices résolus, Bréal 2003
- **Queyrel JL, Mesplede J,** Précis de physique, Electromagnétisme, Cours et Exercices résolus 1^{ère} année, 3^{ème} édition, Bréal, 1, rue de Rome 93561, Rosny Cedex
- **Bertin M., Faroux JP, Renault J,** Electromagnétique 1, cours de physique, Electrostatique, milieux conducteurs, Dunod Université, 3^{ème} Edition.