

Notes de cours sur le calcul des Sections d'Ouvrages

Université Nationale des Sciences, Technologies,
Ingénierie et Mathématiques d'Abomey

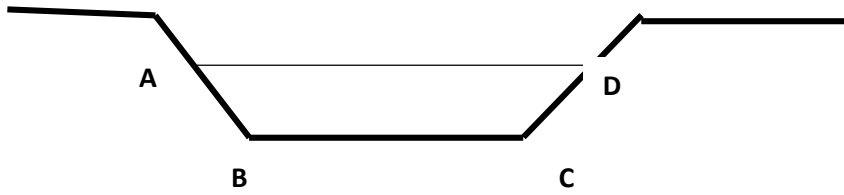


PADONOU G. Tankpinou
Novembre 2023

Chapitre VI : Calcul des Sections d'Ouvrages

A Notions hydrauliques

Considérons un ouvrage de forme trapézoïdale dans lequel s'écoule un fluide.



La section mouillée (S_m), est la section "ABCD" occupée par le fluide dans l'ouvrage.

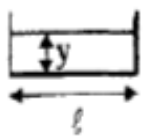
Le périmètre mouillé (P_m), est le périmètre de l'ouvrage en contact avec le fluide. il est égal à $AB + BC + CD$.

Le rayon hydraulique (R_h), est le "rayon moyen" de la section. Il est obtenu par le rapport de la section mouillée sur le périmètre mouillé

$$R_h = \frac{S_m}{P_m}. \quad \text{éq VI-1}$$

Le tableau VI-1 suivant rappelle les formules de calcul des caractéristiques hydrauliques pour certaines formes de canaux.

Tableau VI-1 caractéristiques hydrauliques pour certaines formes de canaux.

Forme	Profondeur	Surface	Périmètre mouillé	Largeur au miroir	Rayon hydraulique	Profondeur moyenne
	y	ℓy	$\ell + 2y$	ℓ	$\frac{\ell y}{\ell + 2y}$	y
	y	$y(\ell + my)$	$\ell + 2y\sqrt{1 + m^2}$	$\ell + 2my$	$\frac{y(\ell + my)}{\ell + 2y\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{y(\ell + my)}{\ell + 2my}$
	y	my^2	$2y\sqrt{1 + m^2}$	$2my$	$\frac{my}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{y}{2}$
	$R(1 - \cos\theta)$	$\frac{R^2}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$	$2R\theta$	$2R\sin\theta$	$\frac{R}{4}\left(2 - \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)$	$\frac{R}{4}\left(\frac{2\theta}{\sin\theta} - 2\cos\theta\right)$

B Ecoulement uniforme

Un écoulement est dit à régime uniforme (écoulement uniforme) lorsque les paramètres géométriques (sections transversales et pentes), hydrauliques (vitesses du fluide) et rugosité des parois et du fond sont tous constants. En conséquence, la surface libre est parallèle au fond de l'ouvrage. Ce type d'écoulement a lieu en général loin des extrémités et des singularités

observables sur le profil en long de l'ouvrage. La hauteur correspondante à un débit donné pour un écoulement uniforme s'appelle hauteur normale ou encore tirant d'eau normal.

Le débit se calcule par une formule du type Manning-Strickler :

$$Q = K_S \times S \times R_H^{2/3} \times \sqrt{I} \quad \text{éq VI-2}$$

Q (m^3/s) est le débit à évacuer par l'ouvrage dans les conditions uniformes ;

$K_S = \frac{1}{n}$ est le coefficient de Strickler ($m^{1/3}/s$) ; n est le coefficient de Manning ($s/m^{1/3}$), tous deux dépendant de la nature de l'ouvrage ;

S est la section mouillée de l'ouvrage (Aire de la partie mouillée de la section transversale) ;

R_H (m) est le rayon hydraulique de l'ouvrage.

I est la pente de fond (donc de la surface libre, l'écoulement étant supposé uniforme).

Le rayon hydraulique (la forme de l'ouvrage) dépendra du but recherché. Considérons deux ouvrages 1 et 2 de même type (caniveau rectangulaire en béton avec $K=80$) de sections respectives (0,50*0,50) et (2,50*0,10). Ces ouvrages ont la même pente (1%).

ouvrage	Section mouillée (m ²)			Périmètre mouillé (m)				Rayon hydraulique (m)	Vitesse (m/s)	Débit capable (m ³ /s)
	L	l	Sm	i	L	l	Pm	Rh	V	Q
1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,5	1,50	0,167	2,423	0,606
2	2,5	0,1	0,25	0,1	2,5	0,1	2,7	0,093	1,637	0,409

Ces ouvrages ont des vitesses d'écoulement v et des débits différents.

Pour un même volume l'ouvrage de type 1 servira le plus rapidement possible à évacuer les eaux, mais il va falloir prêter attention à la vitesse de l'écoulement qui devra être modérée. Dans le cas contraire, il sera préférable d'utiliser un ouvrage de type 2.

Pour des ouvrages d'assainissement en terre selon la nature du sol, la vitesse à adopter varient de 0,5 à 1,5 m/s, si le terrain naturel est sans végétation. Cette vitesse est de 1,8 m/s si le terrain naturel est engazonné. Elle est de 4 m/s pour les ouvrages en béton.

B.1 Choix de la section d'ouvrage : Notion de section hydrauliquement favorable

Le dimensionnement du canal, consiste à déterminer ses dimensions géométriques ((largeur et hauteur d'eau) pour évacuer sous une pente I et une rugosité donnée, un débit connu. Nous sommes face à un problème à deux degrés de liberté dont la résolution consiste à résoudre un problème d'optimisation. La section qu'on obtient par la résolution de ce problème s'appelle la « Section hydrauliquement favorable ».

Cet optimum sera obtenu pour un périmètre mouillé minimisé avec une section mouillée fixée constante.

B.2 Section hydrauliquement favorable de forme circulaire

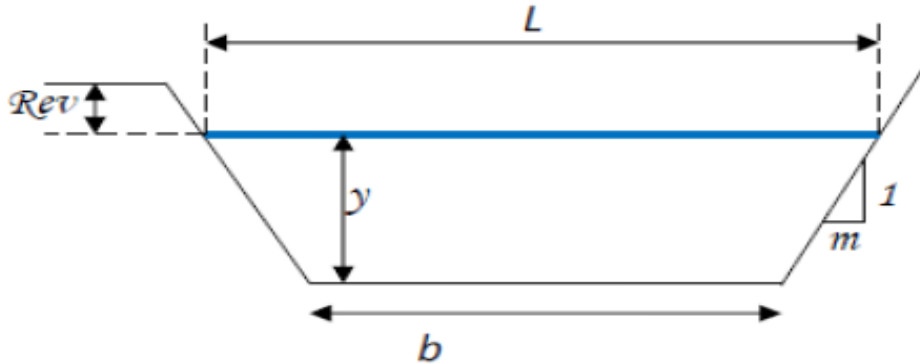
Les sections circulaire et demi-circulaire sont celles qui offrent de par leur géométrie pour une section mouillée donnée, le plus petit périmètre. De ce fait, ces sections sont naturellement hydrauliquement favorables, mais très difficiles à mettre en œuvre.

Pour les canaux en terre par exemple, les risques d'éboulement et la dégradation des parois sont à craindre. C'est pour cela qu'on fait recours généralement aux sections trapézoïdales de préférence isocèles.

B.3 Section hydrauliquement favorable de forme trapézoïdale

Pour déterminer les relations existant entre les dimensions (largeur et tirant d'eau) permettant de résoudre un tel type de problème, on écrira que le périmètre mouillé est minimum, sachant que la section mouillée est fixée.

Cela revient à écrire que les dérivées partielles de ces deux grandeurs sont nulles.



Pour une section trapézoïdale, on a :

$$S = y(b + my) \text{ et } P = b + 2y\sqrt{1 + m^2}$$

Où : y est la profondeur de l'eau ; b est la largeur au plafond et m le fruit.

Pour un débit Q à faire circuler, quand on fait varier " b ", on fait varier la profondeur " y " de l'eau qui est une fonction de " b ". On écrira $y(b)$ et de façon formelle on a :

$$\begin{cases} S(y(b), b) = y(b)[b + my(b)] \\ P(y(b), b) = b + 2y(b)\sqrt{1 + m^2} \end{cases}$$

On aura P minimal et S maximale quand les dérivées dS/db et dP/db s'annulent

$$dS/db = 0 \Rightarrow bdy + 2mydy + ydb = 0 \quad (\text{eq 1})$$

$$dP/db = 0 \Rightarrow db + 2dy\sqrt{1 + m^2} = 0 \quad (\text{eq 2})$$

Il vient que :

$$b = 2y(\sqrt{1 + m^2} - m) \text{ ou } y = \frac{b}{2(\sqrt{1 + m^2} - m)}$$

Alors :

$$\begin{cases} S = yb + my^2 = y^2(2\sqrt{1 + m^2} - m) \\ P = b + 2y\sqrt{1 + m^2} = 2y(2\sqrt{1 + m^2} - m) \end{cases} \quad \text{eq VI-3}$$

Si nous posons $\lambda = 2\sqrt{1 + m^2} - m$ alors : $S = \lambda y^2$ et $P = 2\lambda y$

Le rayon hydraulique favorable sera alors

$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{y}{2}$$

C Ecoulement graduellement varié

C.1 Notion de charge hydraulique

La charge hydraulique est l'énergie totale du fluide par unité de poids (estimée par rapport à une référence horizontale). Elle est la somme, en une section donnée, de l'énergie mécanique, de l'énergie de pression et de l'énergie cinétique, toutes par unité de poids. Elle a pour expression :

$$H = z + y + \frac{v^2}{2g}$$

Où : z est la cote du fond par rapport à une référence horizontale donnée ;

y est le tirant d'eau ; V est la vitesse de l'eau et g est l'accélération de la pesanteur.

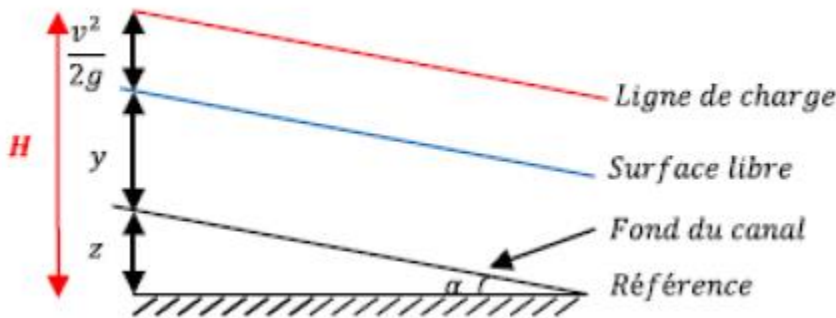


Figure VI-1 : Charge hydraulique

C.2 Théorème de Bernoulli

Il stipule que lorsque les pertes de charge sont négligeables, entre deux sections distinctes de l'ouvrage, on a :

$$H_1 = z_1 + y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{v_2^2}{2g} = H_2 \quad \text{éq VI-4}$$

C.3 Charge spécifique

C'est la charge hydraulique pour laquelle le fond est pris comme référence. Elle s'écrit donc :

$$H_s = y + \frac{v^2}{2g} \quad \text{éq VI-5}$$

C.4 Régimes d'écoulement

Il est mis en évidence, d'une part par les variations de la charge spécifique définie ci-dessus, qui peut encore s'écrire :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2gS^2} \quad \text{éq VI-6}$$

Où : S est la section mouillée.

Cette charge spécifique admet un minimum au point où le tirant d'eau prend la valeur y_c appelée tirant d'eau critique ou hauteur critique, qui n'est rien d'autre que la solution de l'équation

$$\frac{Q^2 l(y)}{gS^2} = 1$$

où $l(y)$ est la largeur en miroir (la largeur de la surface libre dans la section courante.)

La figure suivante représente la courbe de la charge spécifique en fonction de la profondeur, pour un débit (constant) donné.

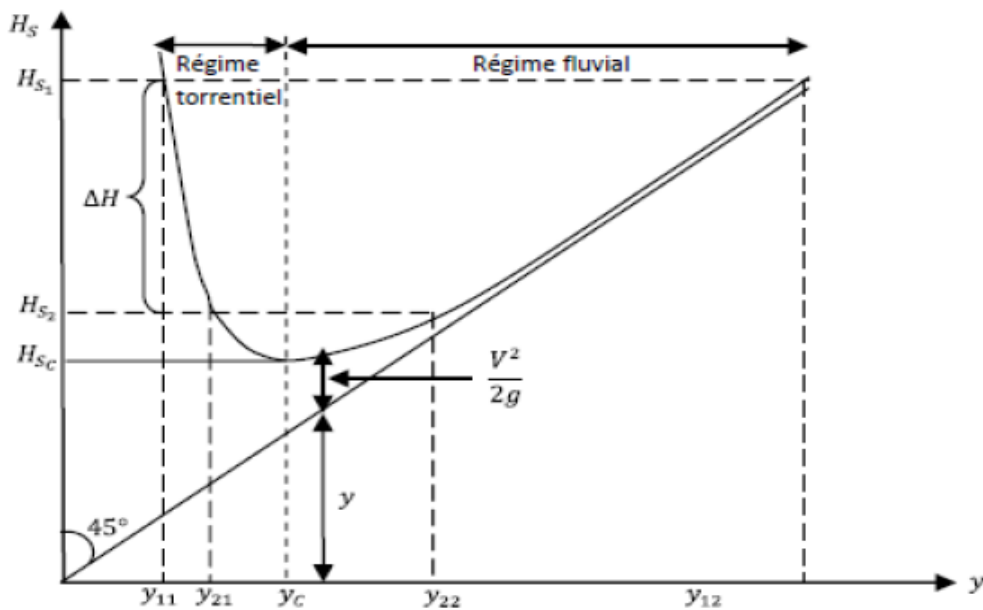


Figure VI-2 : Variation de la charge spécifique en fonction de y pour un débit donné (constant)

Pour $y < y_c$, l'énergie potentielle caractérisée par y est faible et l'énergie cinétique $\frac{v^2}{2g}$ est élevée et donc les vitesses sont élevées. On dit que le régime d'écoulement est torrentiel.

Pour $y > y_c$ l'énergie potentielle caractérisée par y est forte et l'énergie cinétique $\frac{v^2}{2g}$ est faible et donc les vitesses sont faibles. On dit que le régime d'écoulement est fluvial.

Pour une énergie spécifique donnée, le canal peut écouler le débit Q sous deux profondeurs possibles. Pour la première d'entre elles, plus petite que la profondeur critique, le débit est évacué sous un régime torrentiel. Pour la deuxième, supérieure à la profondeur critique, le débit est évacué sous un régime fluvial. L'énergie dissipée entre deux sections de charges respectives H_{s1} et H_{s2} n'est rien d'autre que ce qu'on appelle la perte de charge ($H_{s1} - H_{s2}$). Pour un régime torrentiel, cette perte de charge se traduit par un abaissement de la ligne d'eau et une augmentation de l'énergie cinétique, alors que pour un régime fluvial, elle se traduit par une augmentation de la ligne d'eau et un abaissement de l'énergie cinétique.

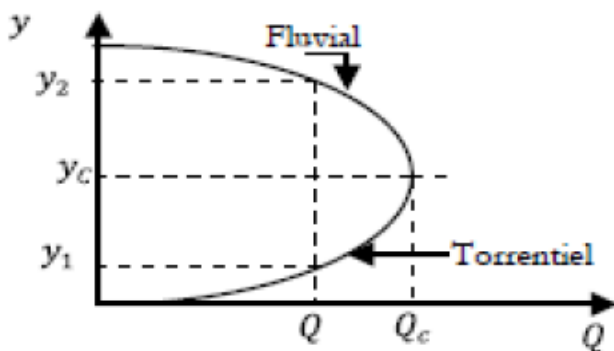


Figure VI-3 : Variation de Q en fonction de y

D'autre part, la courbe de profondeur en fonction du débit (figure précédente) pour une charge constante donnée, permet de mettre en évidence les différents régimes d'écoulement. Cette figure montre que le débit est maximum, pour une charge donnée, lorsque la profondeur est critique.

Pour une charge donnée à l'entrée, en régime torrentiel, le débit de l'ouvrage est au plus égal au débit critique.

C.4.1 Pente critique et son importance dans le dimensionnement

La pente critique est la pente pour laquelle le canal écoule le débit, à la profondeur critique de façon uniforme. Son expression se déduit de : $Q = K_s S R_h^{2/3} \sqrt{I_c}$

Montre que lorsque les pentes sont supérieures à la pente critique, théoriquement le débit de Manning-Strickler serait supérieur au débit critique, ce qui serait en contradiction avec ce qui précède, car le débit maximum se limite au débit critique, pour une énergie spécifique donnée. Ceci veut dire que la pente de l'ouvrage est supérieure à la pente critique, la capacité de l'ouvrage n'est plus fonction de sa pente car l'ouvrage ne peut débiter que ce qu'il peut absorber (au maximum le débit critique). Ceci montre le danger de dimensionner les ouvrages en se basant sur les formules, de type Manning-Strickler, qui sont établies dans les conditions de régime de type uniforme. En somme, les formules de Manning-Strickler peuvent être utilisées pour calculer le débit "capable" pour des pentes inférieures à la pente critique et dès lors que les pentes deviennent supérieures à la pente critique (régimes torrentiels), le débit "capable" reste constant et égal au débit critique.

C.4.2 Section de contrôle et son importance

L'écoulement s'établit dans l'ouvrage en régime torrentiel (l'écoulement fait à un tirant d'eau voisin du tirant d'eau critique), la capacité de l'ouvrage est directement fonction de la charge spécifique disponible en amont. Dans ce cas, ce sont les conditions à l'entrée de l'ouvrage qui contrôlent sa capacité.

On dit que l'ouvrage fonctionne en contrôle amont ou que sa section de contrôle est située en amont. Une perturbation à l'aval ne peut remonter la ligne d'eau et donc n'a aucune influence sur le remous concerné.

Dans le cas d'un régime fluvial, ce sont les conditions à l'aval, la perte de charge ainsi que la rugosité qui vont déterminer le débit à évacuer par l'ouvrage. On dira que l'ouvrage fonctionne en contrôle aval ou que la section de contrôle de l'ouvrage, celle qui va déterminer son débit, se trouve en aval. Dans ces conditions, la ligne d'eau dans l'ouvrage et donc la ligne d'eau à l'amont de celui-ci, vont être contrôlés par le niveau d'eau à l'aval de l'ouvrage.

C.5 Calcul de profondeurs normale et critique

Les profondeurs normale et critique sont indispensables, surtout dans le choix des ouvrages de rétablissement des écoulements naturels. Les équations permettant de calculer ces profondeurs conduisent à des problèmes itératifs, et ne peuvent donc être résolus simplement. Il faut donc faire recours à des méthodes de résolution de problèmes itératifs. Plusieurs méthodes permettent de calculer ces profondeurs. Nous n'en présenterons que deux, mais nous tenons à signaler que d'autres méthodes existent, notamment la méthode des solveurs ou des macros (Sous Microsoft Excel), les programmes informatiques, les calculettes programmables ou dotées de solveurs...

C.5.1 Méthode des abaques

La première des méthodes que nous présentons est celle qui utilise les abaques préétablies et ceci pour certaines sections particulières : circulaire, rectangulaire, trapézoïdale.

C.5.1.1 Cas de la profondeur normale

On sélectionne dans la famille de courbes, celle qui correspond au fruit de berge m de l'ouvrage ($m = \cot g(\alpha)$; α étant l'angle que fait le talus avec l'horizontal). Pour un canal rectangulaire, $m = 1$; le cas du canal circulaire étant mentionné sur l'abaque.

On calcule la grandeur $\frac{Q}{K_s \sqrt{I} b^{8/3}}$ pour les ouvrages de section trapézoïdale et rectangulaire.

$\frac{Q}{K_s \sqrt{I} D^{8/3}}$ pour les canaux de section circulaire, qu'on positionne en abscisse et qu'on projette sur la courbe choisie précédemment.

L'intersection donne le rapport $\frac{y_n}{b}$ (qu'on peut lire indifféremment sur l'axe vertical à droite ou à gauche, les graduations étant les mêmes.) pour en déduire y_n connaissant b .

C.5.1.2 Cas de la profondeur critique

On sélectionne dans la famille de courbes, celle qui correspond au fruit de berge m de l'ouvrage ($m = \cot g(\alpha)$; α étant l'angle que fait le talus avec l'horizontal). Pour un canal rectangulaire $m = 1$; le cas du canal circulaire étant mentionné sur l'abaque.

On calcule la grandeur $\frac{Q}{\sqrt{g} b^5}$ (pour les ouvrages de section trapézoïdale et rectangulaire), qu'on positionne en abscisse (sur l'axe du bas) ou $\frac{Q}{\sqrt{g} D^5}$ (pour les canaux de sections circulaires) qu'on positionne en abscisse (sur l'axe du haut) et qu'on projette sur la courbe choisie précédemment. Le fait de positionner sur l'axe du bas ou du haut suivant les situations, à une importance capitale à cause des échelles de graduation de ces axes qui ne sont pas les mêmes.

L'intersection donne le rapport $\frac{y_c}{b}$ (qu'on peut lire indifféremment sur l'axe vertical à droite ou à gauche, les graduations étant les mêmes.) pour en déduire y_c connaissant b .

C.5.2 Méthode de la débitante (pour y_n) et équivalente pour y_c

C.5.2.1 La profondeur normale

De $Q = K_s S R_h^{2/3} \sqrt{I}$, on déduit que $\frac{Q}{\sqrt{I}} = K_s S R_h^{2/3}$ On calcule la grandeur fixe $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ puis on calcule pour différentes valeurs de y , la grandeur variable $D = K_s S R_h^{2/3}$. Celle pour laquelle le calcul de la grandeur variable coïncide avec de la grandeur fixe n'est rien d'autre que la profondeur normale y_n .

C.5.2.2 La profondeur critique

De $\frac{Q^2 L}{g S^3} = 1$ on déduit que $\frac{Q}{\sqrt{g}} = S \sqrt{\frac{S}{L}}$ On calcule la grandeur fixe $\frac{Q}{\sqrt{g}}$ puis on calcule pour différentes valeurs de y , la grandeur variable $F = S \sqrt{\frac{S}{L}}$. La valeur de y pour laquelle le calcul de la grandeur variable coïncide avec de la grandeur fixe n'est rien d'autre que la profondeur critique.

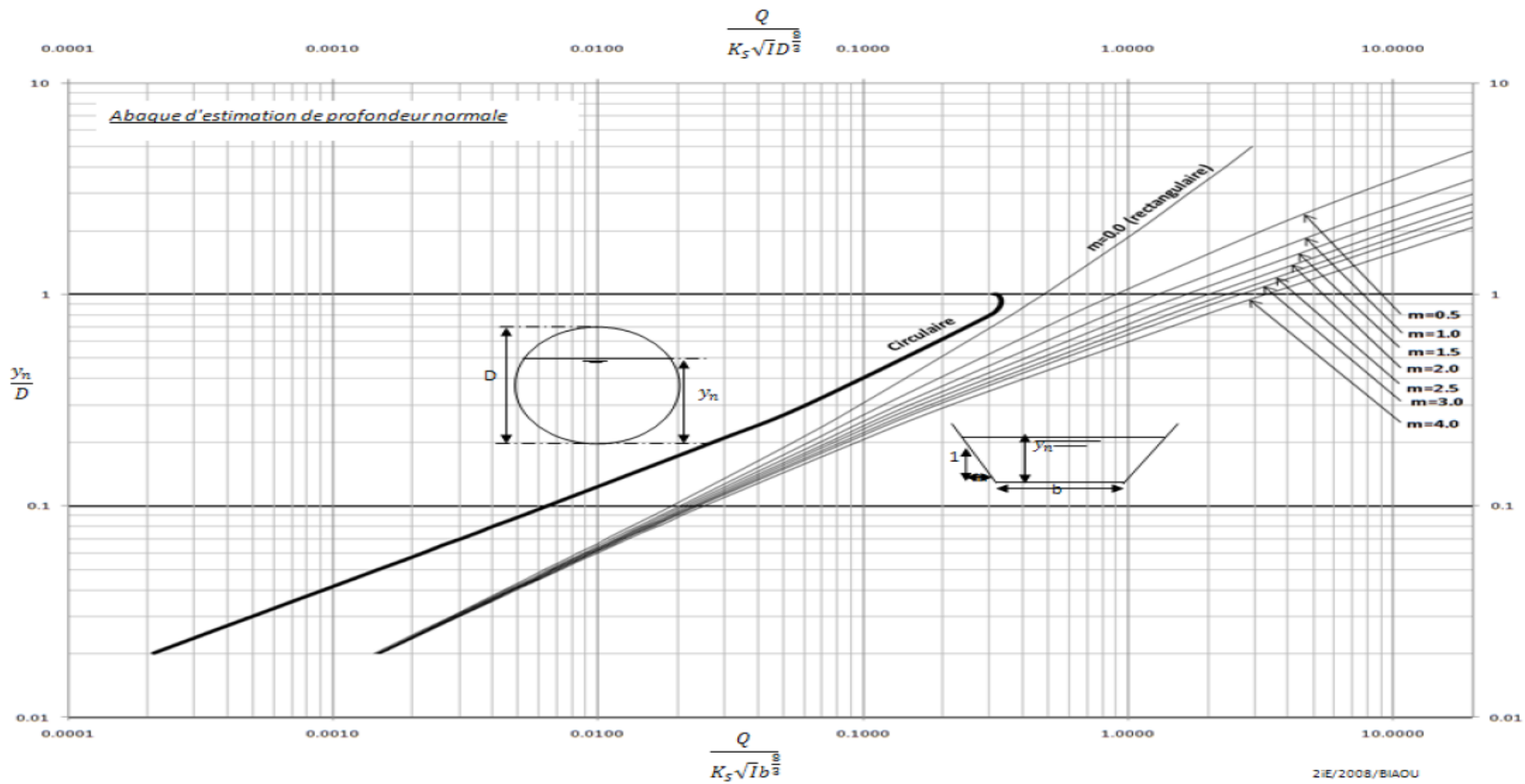


Figure VI-4 : Abaque d'estimation de profondeur normale

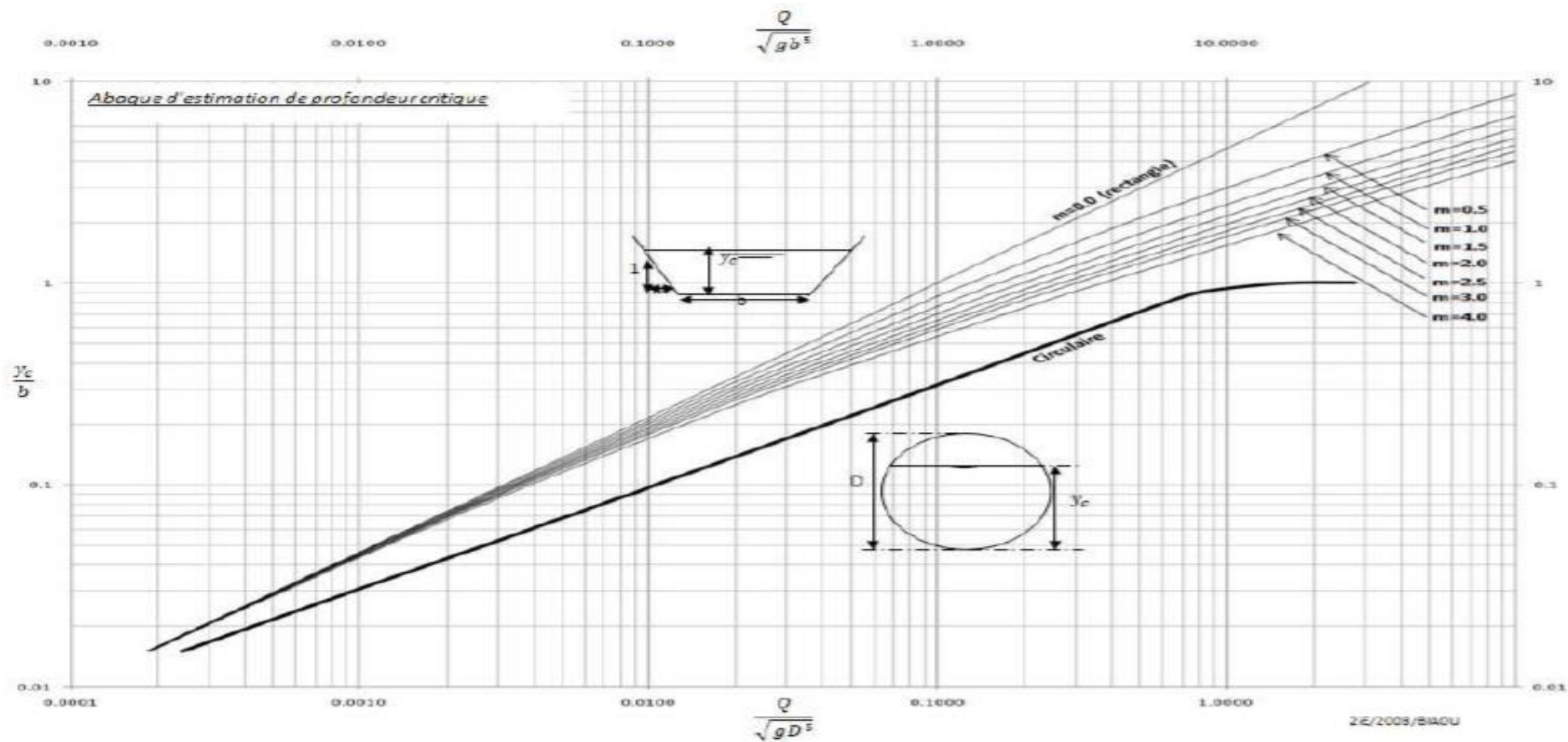


Figure VI-5 : *Abaque d'estimation de profondeur critique*