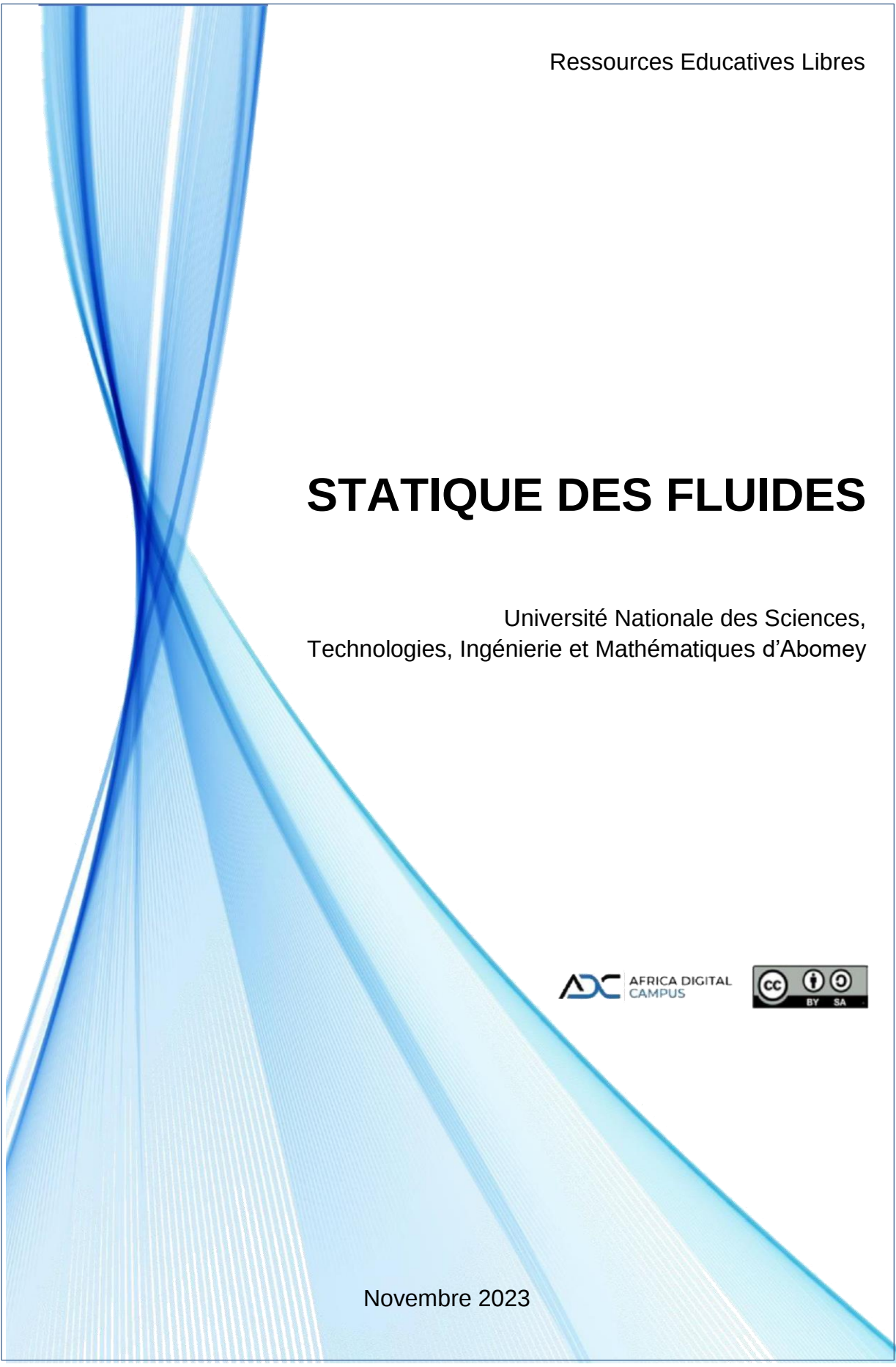




Ressources Educatives Libres

STATIQUE DES FLUIDES

Université Nationale des Sciences,
Technologies, Ingénierie et Mathématiques d'Abomey



Novembre 2023

Chapitre 2

STATIQUE DES FLUIDES

2.1 Introduction

Lors d'une plongée sous marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous marins, les réservoirs...etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures. Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués. Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir ..., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides. La statique des fluides est cette partie de la mécanique des fluides qui traite de l'équilibre des fluides.

2.2 Pression en un point d'un fluide

Un fluide est par définition, un milieu matériel continu déformable, sa déformation peut s'accompagner de résistance ou non. Dans l'étude de la mécanique des fluides, on tiendra compte des forces telles que les forces de volume et celles de surface. On peut donc définir la force qui s'exerce en un point d'un fluide. Soit dS un élément de surface autour d'un point M sur lequel s'exerce une force dF voir fig.(2.1), on appelle pression au point M , la grandeur scalaire

$$P = \frac{dF}{dS}. \quad (2.1)$$

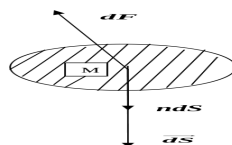


FIGURE 2.1 – Élément de surface

2.3 Equation fondamentale de statistique des fluides.

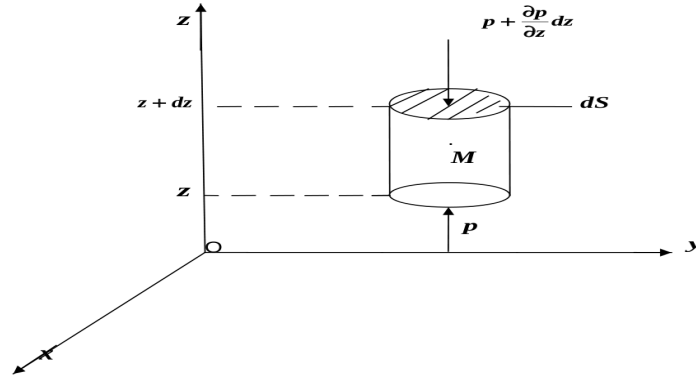


FIGURE 2.2 – Element de volume

On considère un élément de volume cylindrique voir fig.(2.2) dont l'axe est verticale (direction Oz). L'élément étant en équilibre ; on a :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Ici seule la force de volume (le poids) sera considérée. La projection orthogonale de $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur la verticale Oz donne :

$$pdS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dS + \rho f_z dS dz = 0 \quad (2.3)$$

Où f_z est la force de volume (sa projection) suivant Oz et par unité de masse au point M . De même ; on aura deux autres relations analogues suivant les directions Ox et Oy

$$pdS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dS + \rho f_x dS dx = 0, \quad (2.4)$$

$$pdS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dS + \rho f_y dS dy = 0. \quad (2.5)$$

La somme des trois relations donne

$$\rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad} p} = \vec{0}. \quad (2.6)$$

Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel U ; alors

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad} U} \quad (2.7)$$

ce qui implique

$$\rho \overrightarrow{\text{grad} U} + \overrightarrow{\text{grad} p} = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Les surfaces équipotentiellles $U = cste$ se confondent avec les surfaces isobares $p = cste$.

2.4 Hydrostatique.

C'est la statique dans le champ de pesanteur.

Ici $\rho = cste$; $U = gz + cste \implies$

$$\overrightarrow{\rho grad}(gz) + \overrightarrow{grad}p = \overrightarrow{0}, \quad (2.9)$$

$$\overrightarrow{grad}(\rho gz + p) = \overrightarrow{0}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho gz + p) = 0. \quad (2.11)$$

Où z est l'altitude du point M.

Alors $\rho gz + p = K$ est l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

Si $z = cste$, alors $p = cste$, les surfaces d'égale pression dans un fluide homogène sont des plans horizontaux (isobares). Si nous avons deux fluides différents de densités différentes, non miscibles, la surface de séparation entre ces deux liquides est un plan horizontal. C'est pour cela que la surface libre d'un liquide est plane et horizontale.

Remarque : Dans des tubes étroits, la surface libre des liquides n'est pas plane, cela est dû à la présence des forces de capillarité.

Principe fondamental de l'hydrostatique

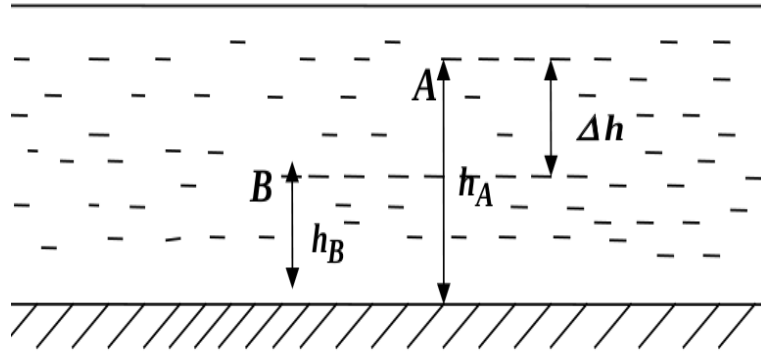


FIGURE 2.3 –

La différence de pressions $p_A - p_B$ entre deux points quelconques A et B pris à l'intérieur d'un fluide voir fig.(2.3) ne dépend que de la distance verticale entre les deux points. Elle est égale au poids d'une colonne de fluide ayant comme base l'unité de surface et comme hauteur, la différence de niveaux entre les deux points.

$$p_B - p_A = \bar{\omega} \bullet \Delta h, \quad (2.12)$$

$$p_B + \rho gz_B = P_A + \rho gz_A = K = cste \quad (2.13)$$

$$p_B - P_A = \rho g(z_A - z_B) = \bar{\omega} \bullet \Delta h \quad (2.14)$$

Principe de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, les variations de pression se transmettent intégralement ; c'est le principe dit de Pascal.

Notons que :

$$1P_a = 1N/m^2 ; 1barye = 1dyne/cm^2(CGS) ; 1P_a = 10baryes$$

On pourrait prendre la pression atmosphérique P_a comme origine des pressions, alors on définit $P_e = P - P_a$ qui est la pression effective.

Remarque : $P_e < 0$ dans le cas du vide.

Montrons que la surface de séparation de deux liquides non miscibles est plane voir figure (2.4).

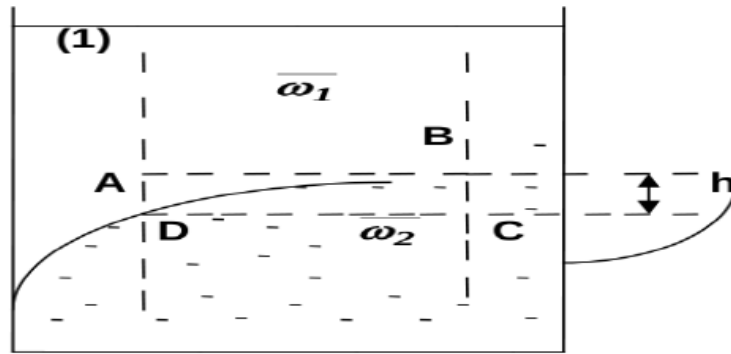


FIGURE 2.4 – Mélange de deux liquides non miscibles

$$P_D - P_A = \bar{\omega}_1 h \quad (2.15)$$

$$P_C - P_B = \bar{\omega}_2 h. \quad (2.16)$$

On a $P_A = P_B$ (A et $B \in$ au même fluide et ont même hauteur). De même pour P_D et P_C . Alors

$$P_D - P_A = P_C - P_B \Rightarrow \bar{\omega}_1 h = \bar{\omega}_2 h. \quad (2.17)$$

$$\bar{\omega}_1 h = \bar{\omega}_2 h = 0, \quad \bar{\omega}_1 \neq \bar{\omega}_2 \Rightarrow h = 0; \quad (2.18)$$

A, B, C et $D \in$ au même plan alors la surface de séparation est plane.

2.5 Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

2.5.1 Démonstration

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$; ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_2 . Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide.

– à l'état initial :

$$P_1 - P_2 = \bar{\omega}(Z_2 - Z_1) \quad (2.19)$$

– à l'état final :

$$(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \bar{\omega}(Z_2 - Z_1). \quad (2.20)$$

En faisant la différence entre (2.19) et (2.20) on obtient

$$\Delta P_1 = \Delta P_2, \quad (2.21)$$

$$\boxed{\Delta P_1 = \Delta P_2}. \quad (2.22)$$

2.6 Notion de Pression relative et absolue : de quoi parle-t-on ?

2.6.1 La pression relative (Prel) ou effective

C'est la différence de pression par rapport à la pression atmosphérique. Elle ne tient pas compte de la pression atmosphérique. Elle peut être positive ou négative : $P_{rel} = P_{eff} = P_{abs} - P_{atm}$. Elle est mesurée par un manomètre (pour les valeurs supérieures à la pression atmosphérique) et par un vacuomètre ou un déprimomètre (pour les valeurs inférieures à la pression atmosphérique).

2.6.2 La pression absolue (Pabs)

Elle se mesure à partir du vide, de la pression zéro. C'est le vide parfait, sans pression atmosphérique. En d'autres termes, la pression absolue prend comme point de départ (zéro) la pression nulle du vide. Elle tient compte de la pression atmosphérique. Elle est toujours positive, jamais négative.

Pression absolue = pression relative + pression atmosphérique. On se sert des instruments de mesure suivants : le manomètre (pour connaître la pression relative) et le baromètre pour définir la pression atmosphérique.

2.7 Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

2.7.1 hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie $(G, \vec{Y})$. G est son centre de surface. D'un côté de la paroi il y a un fluide de poids volumique $\bar{\omega}$, de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm} voir fig.(2.5). On désigne par P_G la pression au centre de surface G du côté fluide.

2.7.2 Éléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression P_G au point G , la pression P_M au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_M - P_G = \bar{\omega}(Y_G - Y_M)$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ défini sur la figure : $y_G = 0$ et $y_M = y$, donc $P_M = P_G - \bar{\omega}y$

Exprimons la force de pression en M : $d\vec{F} = (P_G - \bar{\omega}y).dS.\vec{X}$

Soit $(\vec{\tau}_{poussée})$ le torseur associé aux forces de pression relative :

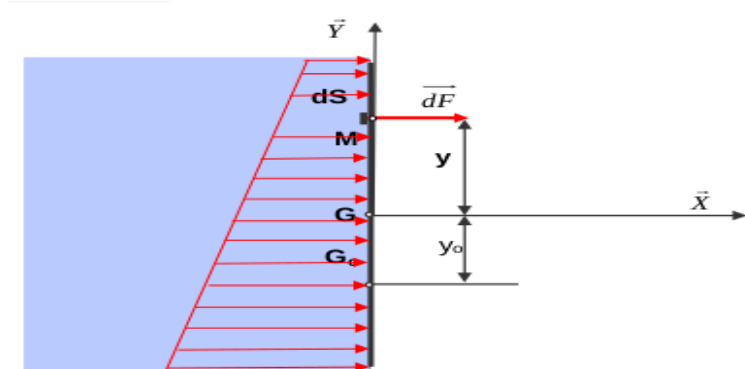


FIGURE 2.5 – Poussée d'un fluide sur une paroi verticale[1]

$$\vec{\tau}_{poussée} = \left(\vec{R} = \int_s d\vec{F}, \quad \vec{M}_G = \int_s \vec{GM} \wedge d\vec{F} \right)_G \quad (2.23)$$

Résultante

$$\vec{R} = \int_{(s)} (P_G - \bar{\omega}y) ds \cdot \vec{X} \quad (2.24)$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[P_G \int_{(s)} ds - \int_{(s)} \bar{\omega}y ds \right] \cdot \vec{X} \quad (2.25)$$

On note que $\int_s dS = S$ (aire de la paroi),

$\int y dS = y_G \cdot S = 0$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \vec{Z})$, donc

$$\boxed{\vec{R} = P_G S \vec{X}} \quad (2.26)$$

Moment

$$\vec{M}_G = \int_s \vec{GM} \wedge d\vec{F} \quad (2.27)$$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ on peut écrire :

$$\vec{GM} = y\vec{Y} \text{ et } d\vec{F} = (P_G - \bar{\omega}y) \cdot dS \cdot \vec{X}$$

Donc

$$\vec{M}_G = \int_s \left[y\vec{Y} \wedge (P_G - \bar{\omega}y) \right] dS \vec{X} \quad (2.28)$$

Sachant que $\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z}$ donc $\vec{M}_G = [P_G \int_s y ds - \bar{\omega} \int_s y^2 dS] (-\vec{Z})$

On sait que $\int y \cdot dS = y_G S = 0$ et $\int_s y^2 dS = I_{G,Z}$ Moment quadratique de la surface (S) par rapport à l'axe $(G, \vec{Z})$ passant par le centre de surface G

$$\boxed{\vec{M}_G = \bar{\omega} I_{G,Z} (-\vec{Z})} \quad (2.29)$$

En résumé

$$\vec{\tau}_{poussée} = \left(P_G \cdot S \cdot \vec{X}, \quad \bar{\omega} \cdot I_{(G,Z)} \cdot (-\vec{Z}) \right)_G \quad (2.30)$$

2.7.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G, \vec{Y})$ et il est tel que :

$$\vec{M}_{G_0} = \vec{M}_G + \vec{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}. \quad (2.31)$$

Ecrivons alors que : $\vec{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{M}_G$.

Avec les résultats précédents, on obtient :

$$y_0 \cdot \vec{Y} \wedge P_G \cdot S \cdot \vec{X} = \bar{\omega} \cdot I(G, Z) \cdot \vec{Z}, \quad (2.32)$$

ce qui conduit à :

$$y_0 = -\frac{\bar{\omega} \cdot I(G, Z)}{P_G \cdot S}. \quad (2.33)$$

G_0 existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G .

Autre méthode de calcul des forces de pression en pratique voir ([7] p54)

2.8 Théorème d'Archimède

2.8.1 Enoncé

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps) voir fig.(2.6). $P_{Arch} = \rho_{fluide} \cdot V_{imm} \cdot g$

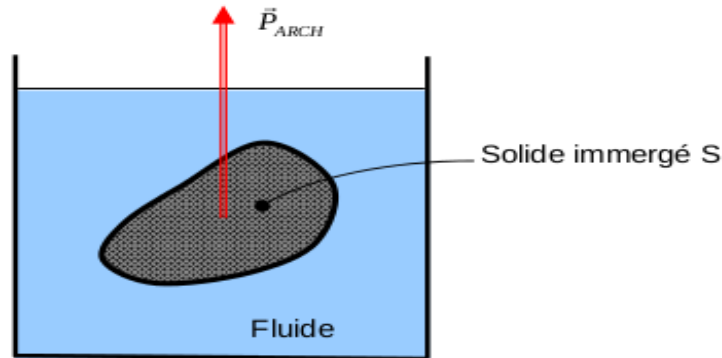


FIGURE 2.6 – Poussée d'Archimède [1]

2.8.2 Démonstration

Dans un fluide (E) de poids volumique $\bar{\omega}$, imaginons un certain volume de fluide ($E1$) délimité par un contour fermé (S) :

Si le fluide est au repos, il est évident que ($E1$) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur, modélisable par le torseur : $(\tau(pes \rightarrow E1))$

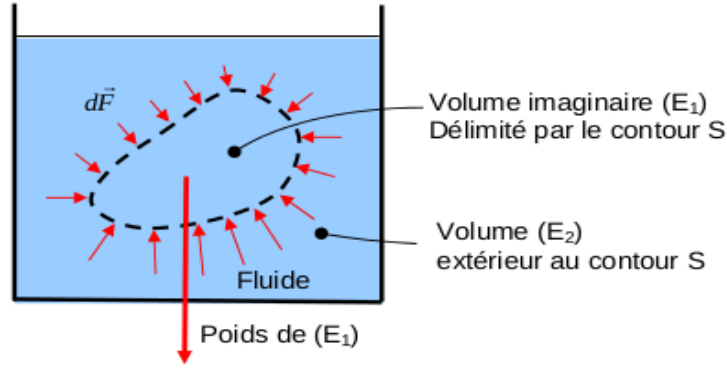


FIGURE 2.7 – Poussée d’Archimède, volume imaginaire [1]

- Action des forces de pression dF du fluide (E_2) qui entoure (E_1) modélisable par $(\tau(E_2 \rightarrow E_1))$

On peut donc écrire l’équation d’équilibre de

$$(E_1) : (\tau(pes \rightarrow E_1)) + (\tau(E_2 \rightarrow E_1)) = (\vec{0}). \quad (2.34)$$

Nous savons qu’en G , centre de gravité du fluide (E_1) le torseur des forces de pesanteur se réduit à un glisseur $(\tau(pes \rightarrow E_1)) = (\vec{P}, \vec{0})_G$

Il est donc évident qu’au même point G le torseur des forces de pression $\vec{dF}$ se réduira lui aussi à un glisseur :

$$(\tau(E_2 \rightarrow E_1)) = \left(\int_{(s)} d\vec{F}, \vec{0} \right)_G \quad (2.35)$$

L’équation d’équilibre de la portion de fluide (E_1) s’écrit :

$$\int_{(s)} d\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}, \quad (2.36)$$

(E_1) est ici une portion de fluide et P est le poids du fluide occupant le volume (E_1). Si le volume (E_1) est occupé par un solide immergé ayant le même contour S , les forces de poussée sur ce contours (S) sont les mêmes, ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du fluide déplacé et non pas de la nature du solide immergé (plomb, acier, etc).

$$\boxed{(\tau(pes \rightarrow E_1)) = (-\vec{P}, \vec{0})_G} \quad (2.37)$$